

時系列解析における漸近展開

田 中 勝 人

I 序 論

II エッジワース展開

III $AR(1)$ モデルにおける最小 2 乗推定量の分布展開 (平均未知の場合)

IV $AR(1)$ モデルにおける t 検定統計量の分布展開 (平均未知の場合)

I 序 論

本論では、時系列モデルに関連した様々の統計量の分布の漸近展開について論じたい。漸近展開の歴史は古く、それは19世紀中頃のチェビシェフにまで遡る。以来、多くの展開方法が提案されており、代表的なものとしては

i) グラム—シャリーエ展開

ii) エッジワース展開

iii) コーニッシュ—フィッシャー展開

がある。この中で、時系列モデルとの関連で最もよく使われるのはエッジワース展開であり、本論においてもこの展開法に話を限って進める。⁽¹⁾時系列モデルに関していえば、漸近展開の歴史は非常に浅い。*Sargan* (1976), *Phillips* (1977) がそのパイオニアと考えられるが、前者が一般的導出方法を論じているのに対し、後者では具体的に、 $AR(1)$ モデルで平均 0 の場合の、自己回帰係数の LSE (最小 2 乗推定量)、及び t 検定統計量のエッジワース展開を求めている。⁽²⁾

以後、*Phillips* (1977) の結果は 3 つの方向に拡張された。第 1 は、任意個の外生変数を含む $AR(1)$ モデル、すなわち

$$(1.1) \quad y_t = \alpha y_{t-1} + \gamma' x_t + u_t$$

に対する α の LSE の分布展開である。⁽³⁾第 2 は、同時方程式体系への拡張であり、今までの所、定義式を含む 2 本の方程式

$$(1.2) \quad C_t = \alpha Y_t + \beta C_{t-1} + u_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

に対する α の LSE ，2段階 LSE の分布展開が $Phillips$ (1980b) によって与えられている。どちらの場合も外生変数を含んでいるため，展開表現はこれに依存しており明示的な結果を求めることは不可能である。それに対して第3の方向は，平均未知の $AR(1)$ モデル，すなわち

$$(1.3) \quad y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + u_t$$

に対する α ， μ の LSE ，及び t 検定統計量の分布展開である⁽⁴⁾この場合には展開結果が明示的に得られ，通常を中心極限定理では明らかにされ得ない事実，例えば平均が0であるかにかよって， α の LSE の分布は標本サイズ T で基準化した後， $1/\sqrt{T}$ のオーダーで異なることなどが明らかにされる。以上述べた方向以外にも，もちろん様々の拡張が考えられるが，それらは進展中のものでありここでは触れない。

第II節では，エッジワース展開の簡単な場合から始まって時系列モデルに関連した展開の $Sargan$ (1976) による一般的な導出方法について論じる。第III節では，平均が0，及び0でない場合の $AR(1)$ モデルにおける係数パラメータの LSE に関する $Phillips$ (1977) 及び $Tanaka$ (1981) の結果を対照する。さらに第IV節では， $AR(1)$ モデルに関連した t 検定統計量の分布展開を考える。

II エッジワース展開

分布展開しようとする統計量を S_T とする。但し，通常の意味での漸近分布のパラメータで基準化されたものとする。 $F_T(x)$ を S_T の分布関数， $f_T(x)$ を密度関数とする⁽⁵⁾さらに以下の諸量を定義する。

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad I^{(j)}(x) = \frac{d^j I(x)}{dx^j}$$

$$i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad i^{(j)}(x) = \frac{d^j i(x)}{dx^j}$$

ここで，

$$(2.1) \quad i^{(j)}(x) = (-1)^j H_j(x) i(x)$$

により $H_j(x)$ を定義すると多項式になり，これをエルミート多項式という。

明らかに

$$(2.2) \quad \int_{-\infty}^x H_j(u) i(u) du = (-1)^j I^{(j)}(x)$$

統計量 S_T の分布の特性関数を $\phi(s)$, キュムラントを k_j とすると, 一般に $k_j = O(T^{1-j/2})$ であり, $\phi(s)$ は

$$(2.3) \quad \phi(s) = e^{-s^2/2} \left[1 + k_3 \frac{(is)^3}{6} + k_4 \frac{(is)^4}{24} + k_3^2 \frac{(is)^6}{72} \right] + O(T^{-3/2})$$

と展開される。従って

$$(2.4) \quad F_T(x) = \int_{-\infty}^x f_T(u) du \\ = \int_{-\infty}^x \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius} \phi(s) ds \right] du$$

より, [] 内の積分を (2.3) 及び

$$(2.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius} e^{-\frac{s^2}{2}} (is)^j ds = H_j(u) i(u)$$

という関係を使って評価すると,

$$(2.6) \quad F_T(x) = I(x) - \frac{k_3}{6} I^{(3)}(x) + \frac{k_4}{24} I^{(4)}(x) + \frac{k_3^2}{72} I^{(6)}(x) \\ + O(T^{-3/2})$$

という $1/T$ のオーダーのエッジワース展開が得られる。

具体例として, $y_1, y_2, \dots, y_T \sim NID(0, 1)$ の時,

$$S_T = \left(\sum_{t=1}^T y_t^2 - T \right) / \sqrt{2T}$$

の分布の展開を求めてみよう。まず, $\sum y_t^2 \sim \chi^2(T)$ より $\sum y_t^2$ の分布の特性関数は $(1-2is)^{-T/2}$ となるから,

$$\phi(s) = \left(1 - \frac{2is}{\sqrt{2T}}\right)^{-T/2} e^{-isT/\sqrt{2T}}$$

S_T のキュムラントは

$$\begin{aligned} \log \phi(s) &= -\frac{T}{2} \log \left(1 - \frac{2is}{\sqrt{2T}}\right) - \frac{isT}{\sqrt{2T}} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(is)^j}{j!} \left(\frac{2}{T}\right)^{j/2-1} \end{aligned}$$

より, $k_j = (2/T)^{j/2-1} = O(T^{1-j/2})$ となる。これより, $\phi(s)$ は (2.3) のように展開され分布展開 (2.6) を得る。

以上の議論から明らかなように, 一般に, $(1/T)^{j/2-1}$ のオーダーの展開を得るためには j 次までのキュムラントの計算が必要である。そのためには, まず S_T の分布の特性関数を計算しなければならない。上述の具体例では S_T の特性関数は, より基本的な統計量 $\sum y_i^2$ の特性関数から簡単に求められ, キュムラントの導出も容易であった。

しかし, 時系列モデルに関連した統計量についてはそう簡単には行かない。このような場合における分布展開の方法は *Sargan* (1976) によって与えられた。今, 考察の対象となる統計量 S_T を

$$S_T = \sqrt{T} e(q)$$

と表わす。ここで, q は $r \times 1$ の確率ベクトルで, 1次及び2次の標本モーメントを要素に持っている。 $e(q)$ は実数値関数である⁽⁶⁾。そして, $E(q) = 0$, $e(0) = 0$ となるように調整しておく。次にテンソル和の慣用表現を使って S_T を $q = 0$ の回りでテーラー展開して

$$\begin{aligned} (2.7) \quad S_T &= \sqrt{T} \left(e_j q_j + \frac{1}{2} e_{jk} q_j q_k + \frac{1}{6} e_{jkl} q_j q_k q_l \right) + O(T^{-3/2}) \\ &= e_j \bar{q}_j + \frac{1}{2\sqrt{T}} e_{jk} \bar{q}_j \bar{q}_k + \frac{1}{6T} e_{jkl} \bar{q}_j \bar{q}_k \bar{q}_l + O(T^{-3/2}) \end{aligned}$$

を得る。但し

$$e_j = \frac{\partial e(0)}{\partial q_j}, \quad e_{jk} = \frac{\partial^2 e(0)}{\partial q_j \partial q_k}, \quad e_{jkl} = \frac{\partial^3 e(0)}{\partial q_j \partial q_k \partial q_l}$$

$$\bar{q}_j = \sqrt{T} q_j, \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_r)'$$

である。 S_T の確率的オーダーは、(2.7)より \bar{q}_j のオーダーと同じであり、それは $O(1)$ である。

問題は、 $\bar{q} = \sqrt{T} q$ の分布の特性関数が与えられた時、(2.7)の関係から S_T の分布の特性関数 $\lambda(s)$ を求めることである。 \bar{q} の分布関数を $F(\bar{q})$ とし、 $\phi(\theta)$ を特性関数とすると、(2.7)より

$$\begin{aligned} (2.8) \quad \lambda(s) &= E(e^{isS_T}) \\ &= \int e^{ise_j \bar{q}_j} \left[1 + \frac{is}{2\sqrt{T}} e_{jk} \bar{q}_j \bar{q}_k + \frac{is}{6T} e_{jkl} \bar{q}_j \bar{q}_k \bar{q}_l - \right. \\ &\quad \left. \frac{s^2}{8T} (e_{jk} \bar{q}_j \bar{q}_k)^2 \right] dF(\bar{q}) + O(T^{-3/2}) \\ &= \phi(se_0) - \frac{is}{2\sqrt{T}} e_{jk} \phi_{jk} - \frac{s}{6T} e_{jkl} \phi_{jkl} - \frac{s^2}{8T} e_{jke_{lm}} \phi_{jklm} + \\ &\quad O(T^{-3/2}) \end{aligned}$$

と展開される。但し、 $e_0 = (e_1, e_2, \dots, e_r)'$

$$\phi_{jk} = \frac{\partial^2 \phi(se_0)}{\partial \theta_j \partial \theta_k}, \quad \phi_{jkl} = \frac{\partial^3 \phi(se_0)}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l}, \quad \phi_{jklm} = \frac{\partial^4 \phi(se_0)}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l \partial \theta_m}$$

さらに、 $\psi(\theta) = \log \phi(\theta)$ とし原点における $\psi(\theta)$ の偏微係数

$$\psi_{jk} = \frac{\partial^2 \psi(0)}{\partial \theta_j \partial \theta_k}, \quad \psi_{jkl} = \frac{\partial^3 \psi(0)}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l}, \quad \psi_{jklm} = \frac{\partial^4 \psi(0)}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l \partial \theta_m}$$

を定義し、(2.8)の最後の式をこれらの偏微係数を使って表現する。

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \exp(\psi(\theta)) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \psi_{jk} \theta_j \theta_k + \frac{1}{6} \psi_{jkl} \theta_j \theta_k \theta_l + \frac{1}{24} \psi_{jklm} \theta_j \theta_k \theta_l \theta_m + \dots \right) \end{aligned}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k\right)\left[1+\frac{1}{6}\psi_{jkl}\theta_j\theta_k\theta_l+\frac{1}{24}\psi_{jklm}\theta_j\theta_k\theta_l\theta_m+\right. \\ \left.\frac{1}{72}(\psi_{jkl}\theta_j\theta_k\theta_l)^2\right]+O(T^{-3/2})$$

だから,

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial^2\phi(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b}=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k\right)\left[\psi_{ab}+\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k+\right. \\ \left.\frac{1}{6}(\psi_{ab}+\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k)\psi_{jkl}\theta_j\theta_k\theta_l+\psi_{abj}\theta_j+\right. \\ \left.\frac{1}{2}(\psi_{aj}\theta_j\psi_{bkl}\theta_k\theta_l+\psi_{bj}\theta_j\psi_{akl}\theta_k\theta_l)\right]/\sqrt{T}+O(T^{-3/2}) \\ \frac{1}{T}\frac{\partial^3\phi(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b\partial\theta_c}=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k\right)\left[\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k\psi_{cl}\theta_l+\psi_{ab}\psi_{cj}\theta_j+\right. \\ \left.\psi_{bc}\psi_{aj}\theta_j+\psi_{ac}\psi_{bj}\theta_j\right]/T+O(T^{-3/2}) \\ \frac{1}{T}\frac{\partial^4\phi(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b\partial\theta_c\partial\theta_d}=\exp\left(\frac{1}{2}\psi_{jk}\theta_j\theta_k\right)\left[\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k\psi_{cl}\theta_l\psi_{dm}\theta_m+\right. \\ \psi_{ab}\psi_{cj}\theta_j\psi_{dk}\theta_k+\psi_{ac}\psi_{bj}\theta_j\psi_{dk}\theta_k+ \\ \psi_{ad}\psi_{bj}\theta_j\psi_{ck}\theta_k+\psi_{bc}\psi_{aj}\theta_j\psi_{dk}\theta_k+ \\ \psi_{bd}\psi_{aj}\theta_j\psi_{ck}\theta_k+\psi_{cd}\psi_{aj}\theta_j\psi_{bk}\theta_k+\psi_{ab}\psi_{cd}+ \\ \left.\psi_{ac}\psi_{bd}+\psi_{ad}\psi_{bc}\right]/T+O(T^{-3/2})$$

これらの結果を (2.8) の最後の式に代入すれば、 S_T の分布の特性関数 $\lambda(s)$ が

$$(2.8)' \quad \lambda(s) = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^2 s^2\right)\left[1+\frac{is\alpha_4}{2\sqrt{T}}-s^2\left\{\frac{\alpha_5}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_7}{2T}+\frac{\alpha_4^2}{8T}+\right.\right. \\ \left.\left.\frac{\alpha_9}{4T}\right\}-is^3\left(\frac{\alpha_1}{6}+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right)+s^4\left(\frac{\alpha_2}{24}+\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{T}}+\frac{\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}}+\right.\right. \\ \left.\left.\frac{\alpha_6}{6T}+\frac{\alpha_3\alpha_4}{4T}+\frac{\alpha_8}{2T}\right)-s^6\left(\frac{\alpha_1^2}{72}+\frac{\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}}+\frac{\alpha_3^2}{8T}\right)\right]+ \\ O(T^{-3/2})$$

として求まる。但し、 $\omega^2 = -\psi_{jk}e_j e_k$ であり、 $\alpha_j (j=1, \dots, 10)$ はエッジ
ワース展開係数と呼ばれるもので

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= i\psi_{jkl}e_j e_k e_l & \alpha_2 &= \psi_{jklm}e_j e_k e_l e_m \\ \alpha_3 &= \gamma_j e_{jk} \gamma_k & \alpha_4 &= -\psi_{jk}e_{jk} \\ \alpha_5 &= i\delta_{jk}e_{jk} & \alpha_6 &= -e_{jkl}\gamma_j \gamma_k \gamma_l \\ \alpha_7 &= e_{jkl}\psi_{jk}\gamma_l & \alpha_8 &= -\gamma_j e_{jk}\psi_{kl}e_{lm}\gamma_m \\ \alpha_9 &= \psi_{jm}e_{jk}\psi_{kl}e_{lm} & \alpha_{10} &= -i\gamma_j e_{jk}\beta_k \\ \gamma_a &= \psi_{aj}e_j & \beta_a &= \psi_{ajk}e_j e_k & \delta_{ab} &= \psi_{abj}e_j\end{aligned}$$

によって定義される。 S_T の分布関数は、(2.4), (2.5) 式を使って

$$\begin{aligned}(2.9) \quad P(S_T < x) &= I\left(\frac{x}{\omega}\right) - \frac{\alpha_4}{2\omega\sqrt{T}} I^{(1)}\left(\frac{x}{\omega}\right) + I^{(2)}\left(\frac{x}{\omega}\right) \left(\frac{\alpha_5}{2\sqrt{T}} + \frac{\alpha_7}{2T} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha_4^2}{8T} + \frac{\alpha_9}{4T}\right) \frac{1}{\omega^2} - I^{(3)}\left(\frac{x}{\omega}\right) \left(\frac{\alpha_1}{6} + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}}\right) \frac{1}{\omega^3} + I^{(4)}\left(\frac{x}{\omega}\right) \\ &\quad \left(\frac{\alpha_2}{24} + \frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{T}} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}} + \frac{\alpha_6}{6T} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{4T} + \frac{\alpha_8}{2T}\right) \frac{1}{\omega^4} + \\ &\quad I^{(6)}\left(\frac{x}{\omega}\right) \left(\frac{\alpha_1^2}{72} + \frac{\alpha_1\alpha_3}{12\sqrt{T}} + \frac{\alpha_3^2}{8T}\right) \frac{1}{\omega^6} + O(T^{-3/2}) \\ &= I\left(\frac{x}{\omega}\right) + i\left(\frac{x}{\omega}\right) \left\{ c_0 + c_1\left(\frac{x}{\omega}\right) + c_2\left(\frac{x}{\omega}\right)^2 + c_3\left(\frac{x}{\omega}\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. c_5\left(\frac{x}{\omega}\right)^5 \right\} + O(T^{-3/2})\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}c_0 &= -\frac{\alpha_4}{2\omega\sqrt{T}} + \frac{\alpha_1}{6\omega^3} + \frac{\alpha_3}{2\omega^3\sqrt{T}} \\ c_1 &= -\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\alpha_5}{2\sqrt{T}} + \frac{\alpha_7}{2T} + \frac{\alpha_4^2}{8T} + \frac{\alpha_9}{4T} \right) \\ &\quad + \frac{3}{\omega^4} \left(\frac{\alpha_2}{24} + \frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{T}} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{12\sqrt{T}} + \frac{\alpha_6}{6T} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{4T} + \frac{\alpha_8}{2T} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{15}{\omega^6} \left(\frac{\alpha_1^2}{72} + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{12\sqrt{T}} + \frac{\alpha_3^2}{8T} \right) \\
 c_2 &= -\frac{1}{\omega^3} \left(\frac{\alpha_1}{6} + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{T}} \right) \\
 c_3 &= -\frac{1}{\omega^4} \left(\frac{\alpha_2}{24} + \frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{T}} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{12\sqrt{T}} + \frac{\alpha_6}{6T} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{4T} + \frac{\alpha_8}{2T} \right) \\
 & \quad + \frac{10}{\omega^6} \left(\frac{\alpha_1^2}{72} + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{12\sqrt{T}} + \frac{\alpha_3^2}{8T} \right) \\
 c_5 &= -\frac{1}{\omega^6} \left(\frac{\alpha_1^2}{72} + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{12\sqrt{T}} + \frac{\alpha_3^2}{8T} \right)
 \end{aligned}$$

この展開は

$$(2.10) \quad P(S_T < x) = I \left(\frac{x}{\omega} + b_0 + b_1 \left(\frac{x}{\omega} \right) + b_2 \left(\frac{x}{\omega} \right)^2 + b_3 \left(\frac{x}{\omega} \right)^3 \right) + O(T^{-3/2})$$

の形にも表現される。但し、 $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1 + c_0^2/2$, $b_2 = c_2$, $b_3 = c_3 + c_0 c_2$ である。又、 S_T/ω の分布の密度関数 $f_T(x)$ は

$$(2.11) \quad f_T(x) = i(x) [1 + c_1 + (2c_2 - c_0)x + (3c_3 - c_1)x^2 - c_2x^3 + (5c_5 - c_3)x^4 - c_5x^6] + O(T^{-3/2})$$

となる。

密度関数の展開 (2.11) より、期待値及び分散の展開も簡単に求められる。期待値については

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad E\left(\frac{S_T}{\omega}\right) &= \int x f_T(x) dx \\
 &= -(c_0 + c_2) + O(T^{-3/2}) \\
 &= \frac{\alpha_4}{2\omega\sqrt{T}} + O(T^{-3/2})
 \end{aligned}$$

であり、分散は

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad Var\left(\frac{S_T}{\omega}\right) &= \int \left(x - \frac{\alpha_4}{2\omega\sqrt{T}}\right)^2 f_T(x) dx + O(T^{-3/2}) \\
 &= 1 - 2c_1 - 6c_3 - 30c_5 - (c_0 + c_2)^2 + O(T^{-3/2}) \\
 &= 1 + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\alpha_5}{\sqrt{T}} + \frac{\alpha_7}{T} + \frac{\alpha_9}{2T}\right) + O(T^{-3/2})
 \end{aligned}$$

となる。より高次のモーメントも同様にして求められる。

以上の議論より明らかなように、時系列モデルの場合には、 S_T の分布の $1/T$ のオーダーの展開を得るためにはより基本的な統計量 \bar{q} の分布の 4 次までのキュムラント、及び S_T を $\sqrt{T}e(q)$ と表現した時の、 $e(q)$ の 3 次までの偏微係数を求めなければならない。後者の計算は容易であるが、前者は行列のトレースや 2 次形式の計算を含んでおり、それらの明示的な値を得るのは一般に不可能である。次節では、明示的に得られる場合として $AR(1)$ モデルで平均が 0 の場合、及び 0 でない場合の係数パラメータの LSE に関する展開を考える。

III $AR(1)$ モデルにおける最小 2 乗推定量の分布展開 (平均未知の場合)

本節では、 $AR(1)$ モデル

$$(3.1) \quad y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + u_t, \quad (t = \dots, -1, 0, 1, \dots; |\alpha| < 1)$$

のパラメータ α , μ の LSE に関するエッジワース展開を行なう。ここで、 $u_t \sim NID(0, \sigma^2)$ である。パラメータ μ については、0 の場合、0 でない場合の 2 通りを考える。後者の場合、 $\{y_t\}$ の平均を $\beta = \mu/(1-\alpha)$ とおく。以下では、主として $\mu \neq 0$ の場合について議論を進め、 $\mu = 0$ の場合に対応する *Phillips* (1977) の結果を対照させることにする。

観測値 $y = (y_0, y_1, \dots, y_T)'$ を与えられて、 α 及び μ の LSE は次のように計算される。

$$(3.2) \quad \hat{\alpha} = \frac{y' A_1 y - \frac{1}{T} (d_1' y) (d_2' y)}{y' A_0 y - \frac{1}{T} (d_1' y)^2} = \frac{q_2 + \mu_2 - (q_3 + \mu_3) (q_4 + \mu_4)}{q_1 + \mu_1 - (q_3 + \mu_3)^2}$$

$$(3.3) \quad \hat{\mu} = \frac{\frac{1}{T} \{ (y' A_0 y) (d_2' y) - (y' A_1 y) (d_1' y) \}}{y' A_0 y - \frac{1}{T} (d_1' y)^2}$$

$$= \frac{(q_1 + \mu_1) (q_4 + \mu_4) - (q_2 + \mu_2) (q_3 + \mu_3)}{q_1 + \mu_1 - (q_3 + \mu_3)^2}$$

ここで

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad (T+1) \times (T+1)$$

$$d_1 = (1, \cdots, 1, 0); \quad d_2 = (0, 1, \cdots, 1)';$$

; $(T+1) \times (T+1)$

$$q_j = \frac{y' A_{j-1} y - E(y' A_{j-1} y)}{T} \quad (j=1, 2)$$

$$q_j = \frac{d_{j-2}' y - E(d_{j-2}' y)}{T} \quad (j=3, 4)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{T} E(y' A_0 y) = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} + \beta^2, \quad \mu_2 = \frac{1}{T} E(y' A_1 y) = \frac{\alpha \sigma^2}{1 - \alpha^2} + \beta^2$$

$$\mu_3 = \frac{1}{T} E(d_1' y) = \beta, \quad \mu_4 = \frac{1}{T} E(d_2' y) = \beta$$

ここで前節のように、展開すべき統計量を $S_T = \sqrt{T} e(q)$ とすると、これに相当するものは (3.2), (3.3) より、 $\hat{\alpha}$ については $e(q) = \hat{\alpha} - \alpha$, $\hat{\mu}$ については $\hat{\mu} - \mu$ であり、 q は 4×1 のベクトルで $E(q) = 0$, $e(0) = 0$ を満足している。⁽⁷⁾

まず、 $e(q)$ の原点における 3 次までの偏微係数を計算する。⁽⁸⁾ 次に $\bar{q} = \sqrt{T} q$ として、 \bar{q} のキュムラントを求める。そのために、 $y' A_{j-1} y$ ($j=1, 2$), 及び $d_j' y$ ($j=1, 2$) の積率母関数 $\bar{\phi}(\theta)$ を計算すると

$$(3.4) \quad \bar{\phi}(\theta) = |G(\underline{\theta}_1)|^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \underline{a}'(\underline{\theta}_2) G^{-1}(\underline{\theta}_1) \Sigma^{-1} \underline{a}(\underline{\theta}_2) - \frac{1}{2} \beta^2 \underline{d}' \Sigma^{-1} \underline{d} \right\}$$

となる。⁽⁹⁾但し

$$\begin{aligned}\theta &= (\theta_1, \dots, \theta_4); \quad \underline{\theta}_1 = (\theta_1, \theta_2); \quad \underline{\theta}_2 = (\theta_3, \theta_4) \\ d &= (1, \dots, 1); \quad a(\underline{\theta}_2) = \beta d + \Sigma(\theta_3 d_1 + \theta_4 d_2); \quad (T+1) \times 1 \\ G(\underline{\theta}_1) &= I - 2(\theta_1 A_0 + \theta_2 A_1) \Sigma; \quad (T+1) \times (T+1) \\ \Sigma &= \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha^T \\ \alpha & & & \vdots \\ \vdots & & & \alpha \\ \alpha^T & \alpha^{T-1} & \dots & \alpha & 1 \end{bmatrix}; \quad (T+1) \times (T+1)\end{aligned}$$

従って、 \bar{q} のキュムラント関数 $\psi(\theta)$ は

$$\begin{aligned}(3.5) \quad \psi(\theta) &= \log [\exp \{ \log \tilde{\phi} \left(\frac{\theta}{\sqrt{T}} \right) - \sqrt{T} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mu_j \}] \\ &= -\frac{1}{2} \log |G(\underline{\theta}_1/\sqrt{T})| + \frac{1}{2} a'(\underline{\theta}_2/\sqrt{T}) G^{-1}(\underline{\theta}_1/\sqrt{T}) \Sigma^{-1} \\ &\quad a'(\underline{\theta}_2/\sqrt{T}) - \sqrt{T} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mu_j - \frac{1}{2} \beta^2 d' \Sigma^{-1} d\end{aligned}$$

前節で述べたように、 $1/T$ のオーダーの展開を得るためには、 $\psi(\theta)$ の原点における 4 次までの偏微係数が必要である。添字 $j, k, l, m=1, 2$, 及び $r, s, t, u=3, 4$ を使って、これらは次のようになる。

$$\begin{aligned}\psi_{jk} &= \frac{2}{T} tr(A_{j-1} \Sigma A_{k-1} \Sigma) + \frac{4}{T} \beta^2 d' A_{j-1} \Sigma A_{k-1} d \\ \psi_{jr} &= \frac{2}{T} \beta d' A_{j-1} \Sigma d_{r-2} \\ \psi_{rs} &= \frac{1}{T} d_{r-2}' \Sigma d_{s-2} \\ \psi_{jkl} &= \frac{1}{T^{3/2}} [4 tr\{A_{l-1} \Sigma A(j, k)\} + 8 \beta^2 d' A(j, k, l) d] \\ \psi_{jkr} &= \frac{4 \beta}{T^{3/2}} d' A(j, k) d_{r-2} \\ \psi_{jrs} &= \frac{2}{T^{3/2}} d_{r-2}' \Sigma A_{j-1} d_{s-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{jklm} &= \frac{1}{T^2} [8tr \{ \Sigma A_{j-1} \Sigma (A(k, l, m) + A(l, k, m)) \} + \\ &\quad 16\beta^2 d' \{ A_{j-1} \Sigma A(k | l, m) + A_{k-1} \Sigma A(l | j, m) + \\ &\quad A_{l-1} \Sigma A(k | j, m) + A_{m-1} \Sigma A(k | l, j) \} d] \\ \psi_{jklr} &= \frac{8\beta}{T^2} d' \{ A(j | k, l) + A(l | k, j) \} \Sigma d_{r-2} \\ \psi_{jkr s} &= \frac{4}{T^2} d_{r-2}' \Sigma A(j, k) d_{s-2} \\ \psi_{rst} &= \psi_{rst} = \psi_{rstu} = 0\end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}A(j, k) &= (A_{j-1} \Sigma A_{k-1} + A_{k-1} \Sigma A_{j-1}) \Sigma \\ A(j, k, l) &= A_{j-1} \Sigma A_{k-1} \Sigma A_{l-1} + A_{k-1} \Sigma A_{l-1} \Sigma A_{j-1} + A_{l-1} \Sigma A_{j-1} \\ &\quad \Sigma A_{k-1} \\ A(j | k, l) &= A_{j-1} \Sigma A_{k-1} \Sigma A_{l-1} + A_{j-1} \Sigma A_{l-1} \Sigma A_{k-1} + A_{k-1} \Sigma A_{l-1} \\ &\quad \Sigma A_{j-1}\end{aligned}$$

これらの偏微係数のオーダーは、明らかに

$$\psi_{jk} = O(1), \quad \psi_{jkl} = O(T^{-1/2}), \quad \psi_{jklm} = O(T^{-1}) \quad \text{for } j, k, l, m = 1, 2, 3, 4$$

である。これらの表現は行列のトレースや2次形式を含んでいるが、展開表現を得るにはそれぞれの最高次の値のみを計算すればよいことがわかる⁽¹⁰⁾。その場合に、次の2つの補題は有用である。 $AR(1)$ 過程のスペクトラムを $f(\omega) = 1 / |1 - ae^{i\omega}|^2$ とおくと、

補題 1 $j, k, l, m = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} tr(A_{j-1} \Sigma A_{k-1} \Sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\omega) (\cos \omega)^{j+k-2} d\omega + O(T^{-1}) \\ \frac{1}{T} tr \{ A_{j-1} \Sigma A(k | l, m) \} &= \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^3(\omega) (\cos \omega)^{j+k+l+m-4} d\omega + \\ &\quad O(T^{-1})\end{aligned}$$

が成立する。

証明は, Hannan (1970, pp. 353—355) 参照。偏微係数の表現には, 他にも様々の形のトレースがあらわれているが, すべて補題 1 のようにして計算できる。他方, 2 次形式の部分の計算については,

補題 2 $j, k, l, m=1, 2$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}d'A_{j-1}\Sigma A_{k-1}\Sigma d &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\omega) (\cos\omega)^{j+k-2} g(\omega) d\omega + \\ &\quad O(T^{-1}) \\ \frac{1}{T}d'A_{j-1}\Sigma A(k|l, m)d &= \frac{3}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^3(\omega) (\cos\omega)^{j+k+l+m-4} \\ &\quad g(\omega) d\omega + O(T^{-1})\end{aligned}$$

が成立する。但し, $g(\omega) = 1 + 2(\cos\omega + \cos 2\omega + \dots)$

(証明) 第 1 の等式が成り立つことを証明する。まず, 次の等式が成立することに注目する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}d'A_{j-1}\Sigma A_{k-1}\Sigma d &= \frac{1}{T}tr(A_{j-1}\Sigma A_{k-1}\Sigma dd') \\ &= \frac{1}{T}tr\{A_{j-1}\Sigma A_{k-1}\Sigma (I + 2A_1 + 2A_2 + \dots + \\ &\quad 2A_T)\}\end{aligned}$$

ここで, $A_r (r=1, \dots, T)$ は

$$A_r = \begin{pmatrix} & & \overset{r}{\curvearrowright} & & \\ 0 & \dots & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \dots & & \frac{1}{2} & \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & & 0 \end{pmatrix} (r; (T+1) \times (T+1))$$

によって定義される。補題 1 により, 任意に固定された $r_0 (< T)$ に対して

$$\frac{1}{T}tr\{A_{j-1}\Sigma A_{k-1}\Sigma (I + 2A_1 + \dots + 2A_{r_0})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\omega)$$

$$(\cos \omega)^{j+k-2} g_{r_0}(\omega) d\omega + O(T^{-1})$$

となる。但し、 $g_r(\omega) = 1 + 2(\cos \omega + \cos 2\omega + \cdots + \cos r\omega)$ 。一方、

$$\frac{1}{T} \sum_{t > r_0}^T tr(A_{j-1} \Sigma A_{k-1} \Sigma A_t) = O(|\alpha|^{r_0})$$

となることが示されるから、 r_0 を任意に大きくとることにより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} d' A_{j-1} \Sigma A_{k-1} \Sigma d &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\omega) (\cos \omega)^{j+k-2} g_{r_0}(\omega) d\omega + \\ &O(T^{-1}) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g_{r_0}(\omega)$ を $g(\omega)$ にかえても、それによって $O(|\alpha|^{r_0})$ の差しかもたらさないから等式は証明されたことになる。

第2の等式についても同様に証明できる。(証終)

以上2つの補題により、 $\psi(\theta)$ の原点における4次までの偏微係数はそれぞれの最高次の値が、コーシーの留数定理を使って明示的に計算できる。但し、 $\omega^2 = \Sigma \psi_{jk} e_j e_k$ については、 $1/T$ のオーダーの展開には $\psi_{jk} = O(1)$ であるにもかかわらず、 $1/T$ のオーダーまでの値が必要である。 ω^2 の値を精密に計算すると、 $\hat{\alpha}$ の場合には $\omega^2 = 1 - \alpha^2$ となり、 $\hat{\mu}$ の場合には $\omega^2 = \sigma^2 + \beta^2 (1 - \alpha^2)$ となる。中心極限定理より、

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha) &\longrightarrow N(0, 1 - \alpha^2) \\ \sqrt{T}(\hat{\mu} - \mu) &\longrightarrow N(0, \sigma^2 + \beta^2 (1 - \alpha^2)) \end{aligned}$$

であるから、 ω^2 はそれぞれの基準化された統計量の漸近分布の分散となっている。

$e(q)$ 及び $\psi(\theta)$ の原点における偏微係数を求めた後、エッジワース展開係数 a_j ($j=1, \dots, 10$)を計算すれば第II節の(2.9)式のような展開表現が得られる。まず、 $\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha)$ の分布の $1/T$ のオーダーの展開は

$$(3.6) \quad P(\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha) < x) = I\left(\frac{x}{\omega}\right) + i\left(\frac{x}{\omega}\right) \left\{ c_0 + c_1 \left(\frac{x}{\omega}\right) + c_2 \left(\frac{x}{\omega}\right)^2 + \right.$$

$$c_3 \left(\frac{x}{\omega} \right)^3 + c_5 \left(\frac{x}{\omega} \right)^5 \Big\}$$

となる。但し、 $\omega^2 = 1 - \alpha^2$ であり、 c_j については参考のため、 $\mu = 0$ の場合の c_j に対応する値 \bar{c}_j とともに以下に示す。

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{2\alpha + 1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} & \bar{c}_0 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \\ c_1 &= -\frac{1}{4T} \frac{7\alpha + 1}{1 - \alpha} & \bar{c}_1 &= \frac{1}{4T} \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} & \bar{c}_2 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \\ c_3 &= \frac{1}{4T} \frac{1 - 4\alpha - 3\alpha^2}{1 - \alpha^2} & \bar{c}_3 &= \frac{1}{4T} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \\ c_5 &= -\frac{1}{2T} \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} & \bar{c}_5 &= -\frac{1}{2T} \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \end{aligned}$$

分布展開のもう一つの表現は

$$(3.7) \quad I \left(\frac{x}{\omega} + b_0 + b_1 \left(\frac{x}{\omega} \right) + b_2 \left(\frac{x}{\omega} \right)^2 + b_3 \left(\frac{x}{\omega} \right)^3 \right)$$

であり、

$$\begin{aligned} b_0 &= c_0 \\ b_1 &= \frac{1}{4T} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \\ b_2 &= c_2 \\ b_3 &= \frac{1}{4T} \frac{5\alpha^2 + 1}{1 - \alpha^2} \end{aligned}$$

である。

平均が0である場合と、0でない場合とを比較するために $1/\sqrt{T}$ のオーダーの展開表現を考えると、前者は *Phillips* (1977) より

$$(3.8) \quad I\left(\frac{x}{\omega}\right) + i\left(\frac{x}{\omega}\right) \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left(1 + \left(\frac{x}{\omega}\right)^2\right)$$

であり、後者は

$$(3.9) \quad I\left(\frac{x}{\omega}\right) + i\left(\frac{x}{\omega}\right) \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} (2\alpha + 1 + \alpha \left(\frac{x}{\omega}\right)^2)$$

となる。パラメータ α が正の時には、どちらの分布も右にゆがんでおり、ゆがみの程度は平均が 0 でない (3.9) の場合の方がより大きいことがわかる。又、展開はどちらの場合も、 α が 1 に近い時には正規分布から相当ずれることが想像される。図 1 ~ 4 は、上で得られた展開を正規分布と比較したものである。横軸の値は x/ω であり、-3 から 3 の間の値に対して対応する関数のグラフが描かれている。図 1, 2 では $T=10$ で、 $\alpha=0.4$ と 0.8 の場合が、図 3, 4 では $T=20$ で、 $\alpha=0.4$ と 0.8 の場合がそれぞれ描かれている。これらの図から読みとれる事実を以下にまとめる。

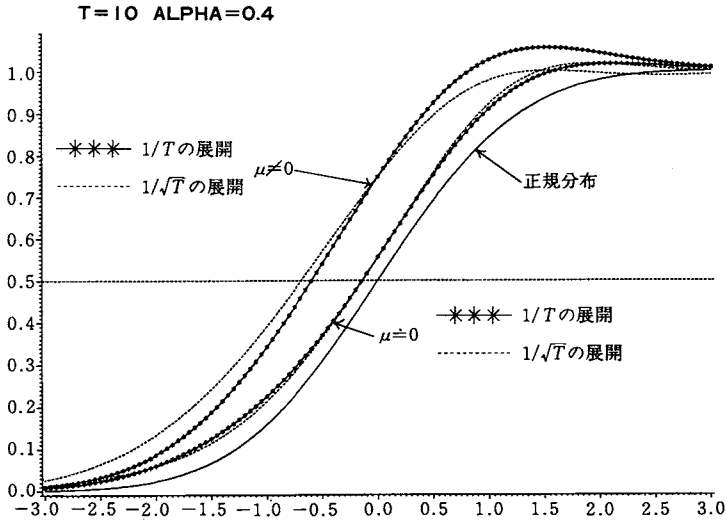
- i) 標本サイズが $T=10$ と小さい時には、平均が 0 の場合と 0 でない場合とでは、両者の展開の間かなりの差がある。又、正規分布とも相当ずれている。
- ii) 自己回帰係数 α の値によって、同じ標本サイズでも分布の形状は変わる。 $T=10$ の場合には特に著しい。
- iii) α がそれ程大きくない場合には、分布の形状は展開のオーダーにそれほど左右されない。しかし、平均が 0 でない場合には、 α が 1 に近づくとも展開のオーダーに相当左右される。 $T=20$ の場合でも、展開のオーダーによる差が依然としてある。

密度関数は、 $1/\sqrt{T}$ のオーダーで、平均 0 の場合は

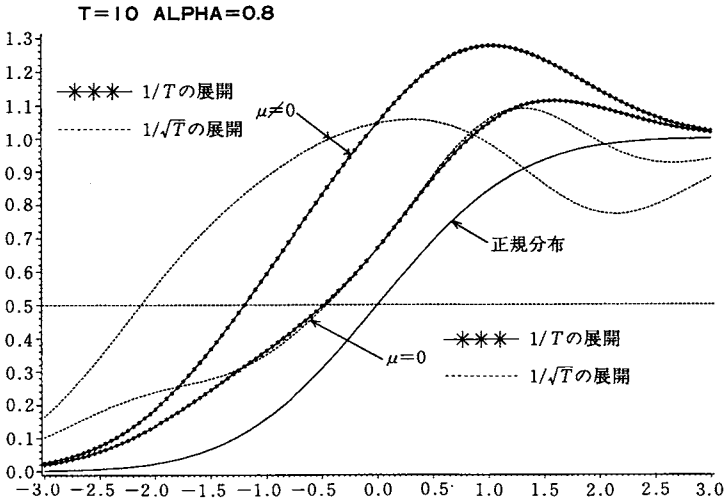
$$(3.10) \quad i\left(\frac{x}{\omega}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left(\frac{x}{\omega} - \left(\frac{x}{\omega}\right)^3 \right) \right\}$$

0 でない場合は

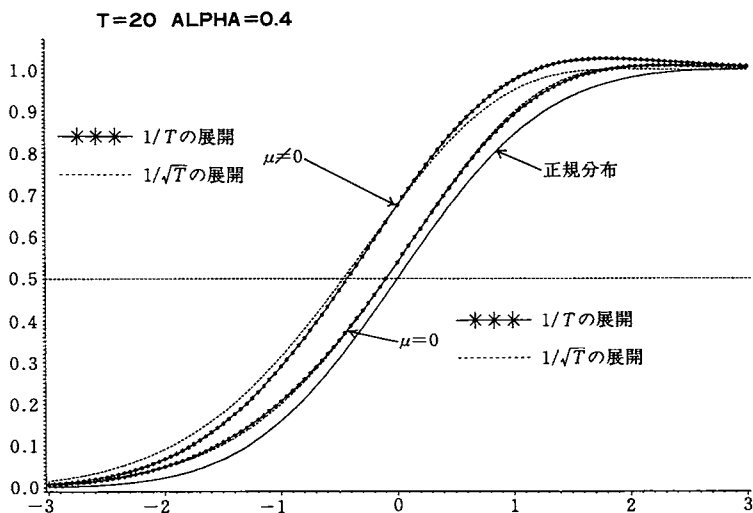
$$(3.11) \quad i\left(\frac{x}{\omega}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left(\frac{x}{\omega} + \alpha \left(\frac{x}{\omega}\right)^3 \right) \right\}$$



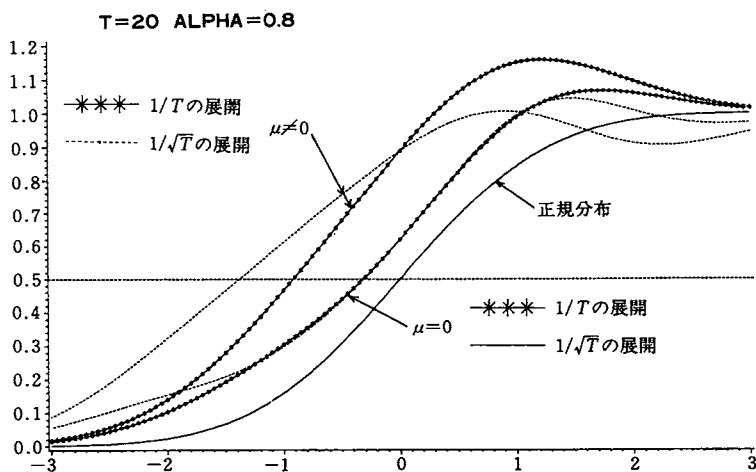
第1図 $\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)$ の分布展開($T=10, \alpha=0.4$)



第2図 $\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)$ の分布展開($T=10, \alpha=0.8$)



第3図 $\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)$ の分布展開($T=20, \alpha=0.4$)



第4図 $\sqrt{T}(\hat{\alpha}-\alpha)$ の分布展開($T=20, \alpha=0.8$)

が得られる。期待値に関しては、平均 0 の場合は

$$(3.12) \quad E(\hat{\alpha}) = \alpha - \frac{2\alpha}{T} + O(T^{-2})$$

0 でない場合は

$$(3.13) \quad E(\hat{\alpha}) = \alpha - \frac{3\alpha+1}{T} + O(T^{-2})$$

となる。

次に、(3.3) で定義された $\hat{\mu}$ の分布展開に移る。展開は $\omega^2 = \sum \psi_{jk} e_j e_k$ の他に、エッジワース展開係数 α_j ($j=1, \dots, 10$) を計算すれば求められるが、ここでは次の補題を使って $\hat{\mu}$ の定義を簡単化してから α_j の計算を行なう。

補題 3 $e(q) = \hat{\mu} - \mu$ に基づくエッジワース展開係数は、 q の代りに $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3, q_3)'$ を使って $e(\bar{q})$ から計算されるものと等しい。従って、 ω^2 を $e(q)$ に基いて $\sum \psi_{jk} e_j e_k$ から計算するならば、 $\sqrt{T}e(q)$ と $\sqrt{T}e(\bar{q})$ のエッジワース展開は相等しい。

証明はほとんど自明なので省略する。この補題により、実質的に 3 次元となったベクトル \bar{q} の関数

$$(3.14) \quad e(\bar{q}) = \frac{(q_3 + \mu_3)(q_1 + \mu_1 - q_2 - \mu_2)}{q_1 + \mu_1 - (q_3 + \mu_3)^2}$$

に基いて α_j を求めればよい。最終的に次の結果を得る。 $\sqrt{T}(\hat{\mu} - \mu)$ の分布展開は、 $1/T$ のオーダーで (3.6) の形をしていて、

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ 2\alpha \frac{\beta}{\omega} + (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 \right\} \\ c_1 &= -\frac{1}{4T} \left\{ \frac{8\alpha}{1-\alpha} - 4(\alpha^2 + 3\alpha - 4) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 + 3(1-\alpha^2)(\alpha^2 + 4\alpha - \right. \\ &\quad \left. 15) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^4 + 30(1-\alpha^2)^2 \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^6 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= -\frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ (1+\alpha) \frac{\beta}{\omega} - (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 \right\} \\
 c_3 &= \frac{1}{4T} \left\{ -\frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha} - 2(\alpha^2 - 8\alpha - 9) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. (1-\alpha^2) (\alpha^2 - 16\alpha - 35) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^4 + 20(1-\alpha^2)^2 \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^6 \right\} \\
 c_5 &= -\frac{1}{2T} \left\{ (1+\alpha)^2 \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 - 2(1+\alpha) (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^4 + \right. \\
 &\quad \left. (1-\alpha^2)^2 \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^6 \right\}
 \end{aligned}$$

但し、 $\omega^2 = \sigma^2 + \beta^2(1-\alpha^2)$ である。これら c_j の値は、 $\omega^2 = 1 - \alpha^2$ 、 $\beta = -1$ とすれば $\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha)$ の展開結果 (3.6) に帰着する。又、 $1/\sqrt{T}$ のオーダーの展開は

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad I\left(\frac{x}{\omega}\right) - i\left(\frac{x}{\omega}\right) \frac{1}{\sqrt{T}} &\left\{ 2\alpha \frac{\beta}{\omega} + (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 + \left((1+\alpha) \frac{\beta}{\omega} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 \right) \left(\frac{x}{\omega} \right)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

であり、対応する密度関数は

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad i\left(\frac{x}{\omega}\right) &\left[1 - \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \left(2\frac{\beta}{\omega} - 3(1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 \right) \frac{x}{\omega} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left((1+\alpha) \frac{\beta}{\omega} - (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 \right) \left(\frac{x}{\omega} \right)^3 \right\} \right]
 \end{aligned}$$

となる。従って、

$$(3.17) \quad E(\hat{\mu}) = \mu + \frac{1}{T}(3\alpha + 1)\beta + O(T^{-2})$$

を得る。

$\sqrt{T}(\hat{\mu} - \mu)$ の展開表現は $\hat{\alpha}$ の場合ほど単純ではなく、 α 及び β の他に β/ω の大きさにも依存している。確実にいえることは、 α 及び β が正で、 β/ω が

1 より小さい時には、 $\hat{\alpha}$ の場合とは逆に、分布は左にゆがんでおり、正の偏りをもっている。又、平均のパラメータ β が大きくなるに従って、正規分布からよりずれることが想像される。実際、 $1/\sqrt{T}$ のオーダーの展開で、 $T=10$ 、 $\alpha=0.4$ 、 $\sigma^2=1$ の場合について、 $\beta=1(\mu=0.6)$ の時と $\beta=15(\mu=9)$ の時を比べると図 5 からこの事実が見てとれる。図 6 は、 $T=20$ の場合に同様の分布を描いたものであるが、依然としてずれはあるものの、 $T=10$ の場合に比べてその程度が減少している。

IV AR(1)モデルにおける t 検定統計量の分布展開 (平均未知の場合)

本節では、AR(1)モデル (3.1) に基く係数の t 検定統計量のエッジワース展開を考える。 $LSE \hat{\alpha}$ 、 $\hat{\mu}$ に関連した t 検定統計量を $t_{\hat{\alpha}}$ 、 $t_{\hat{\mu}}$ とすると、これらはそれぞれ

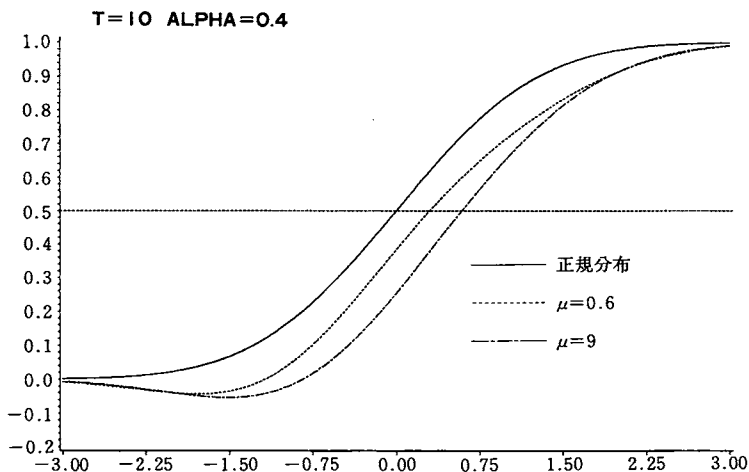
$$(4.1) \quad t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{s_{\hat{\alpha}}}$$

$$(4.2) \quad t_{\hat{\mu}} = \frac{\hat{\mu} - \mu}{s_{\hat{\mu}}}$$

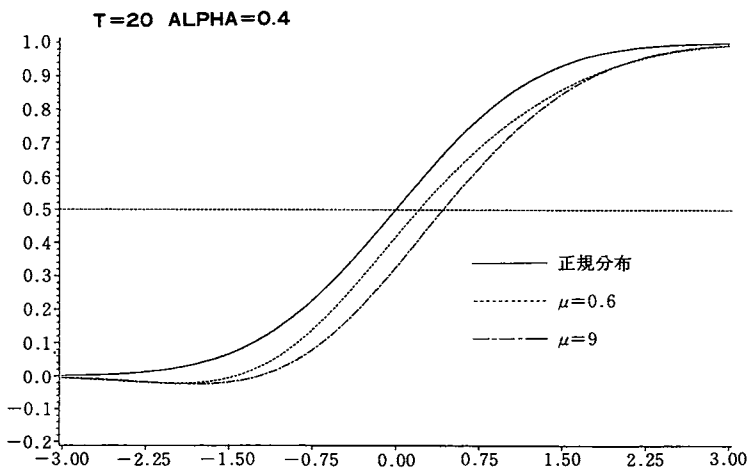
で定義される。但し

$$\begin{aligned} s_{\hat{\alpha}}^2 &= \frac{\hat{\sigma}^2}{y' A_0 y - \frac{1}{T} (d_1' y)^2} \\ s_{\hat{\mu}}^2 &= \frac{\hat{\sigma}^2 y' A_0 y / T}{y' A_0 y - \frac{1}{T} (d_1' y)^2} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{T-2} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu} - \hat{\alpha} y_{t-1})^2 \\ &= \frac{1}{T-2} \left\{ y' \bar{A}_0 y - \frac{(y' A_1 y)^2 + \frac{1}{T} (y' A_0 y)(d_1' y)^2 - \frac{2}{T} (y' A_1 y)(d_1' y)(d_2' y)}{y' A_0 y - \frac{1}{T} (d_1' y)^2} \right\} \end{aligned}$$

であり、 \bar{A}_0 は



第 5 図 $\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ の分布展開 ($T=10, \alpha=0.4, \sigma^2=1$)



第 6 図 $\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ の分布展開 ($T=20, \alpha=0.4, \sigma^2=1$)

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}; (T+1) \times (T+1)$$

によって定義される。

LSE の表現に比べて相当複雑になっているので、ここでは前節の補題3を適用して次のように修正された統計量の展開を考えることにする。

$$(4.3) \quad \tilde{t}_{\hat{\alpha}} = \frac{\sqrt{T}\{q_2 + \mu_2 - \alpha(q_1 + \mu_1) - (1 - \alpha)(q_3 + \mu_3)^2\}}{[(q_1 + \mu_1 - q_2 - \mu_2)(q_1 + \mu_1 + q_2 + \mu_2 - 2(q_3 + \mu_3)^2)]^{1/2}}$$

$$(4.4) \quad \tilde{t}_{\hat{\mu}} = \frac{\sqrt{T}\{(q_1 + \mu_1 - q_2 - \mu_2)(q_3 + \mu_3) - \mu(q_1 + \mu_1 - (q_3 + \mu_3)^2)\}}{[(q_1 + \mu_1)(q_1 + \mu_1 - q_2 - \mu_2)(q_1 + \mu_1 + q_2 + \mu_2 - 2(q_3 + \mu_3)^2)]^{1/2}}$$

ここで、 q_j ($j=1, 2, 3$) は前節で定義されたものであり、 $q_j=0$ のとき $\tilde{t}_{\hat{\alpha}} = \tilde{t}_{\hat{\mu}} = 0$ となることに注意する。 ω^2 の計算に関しても、(4.3), (4.4) に基いて行なうので得られる展開は $1/\sqrt{T}$ のものであり、その場合には、 $e(q)$ の原点における偏微係数は2次まで、又、 $\psi(\theta)$ の偏微係数は3次までのものが必要である。エッジワース展開係数については、 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ だけが必要である。平均0の場合もそうであるが、 $1/T$ のオーダーの展開は、未だ求められていない。

まず、 $t_{\hat{\alpha}}$ の分布展開に関しては

$$(4.5) \quad P(t_{\hat{\alpha}} < x) = I(x) + \frac{i(x)}{\sqrt{T}} \frac{2\alpha + 1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} + O(T^{-1})$$

が得られる。平均0の場合は

$$(4.6) \quad P(t_{\hat{\alpha}} < x) = I(x) + \frac{i(x)}{\sqrt{T}} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} + O(T^{-1})$$

である⁽¹²⁾ 密度関数は、(4.5) に対応して

$$(4.7) \quad i(x) \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{T}} \frac{2\alpha + 1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right\} + O(T^{-1})$$

であり、(4.6) に対応して

$$(4.8) \quad i(x) \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{T}} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right\} + O(T^{-1})$$

となる。 LSE の分布に比べれば、ゆがみはそれ程でもないが、平均が0でない場合の方がそうである場合よりゆがんでいるのは、 LSE の場合と同様である。期待値は、平均が0でない場合

$$(4.9) \quad E(t_a) = -\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{2\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}} + O(T^{-2})$$

であり、0の場合

$$(4.10) \quad E(t_a) = -\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} + O(T^{-1})$$

となる。

次に、 $t_{\hat{\mu}}$ については、 $1/\sqrt{T}$ のオーダーの展開として

$$(4.11) \quad P(t_{\hat{\mu}} < x) = I(x) - \frac{i(x)}{\sqrt{T}} \left\{ 2\alpha \frac{\beta}{\omega} + (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 \right\} + O(T^{-1})$$

が得られる。但し、 $\omega = (\sigma^2 + \beta^2(1-\alpha^2))^{1/2}$ である。 LSE の展開と同様、 $\omega = (1-\alpha^2)^{1/2}$, $\beta = -1$ とおけば $t_{\hat{\mu}}$ の展開は、 t_a の展開に帰着する。対応する密度関数は

$$(4.12) \quad i(x) \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{T}} \left(2\alpha \frac{\beta}{\omega} + (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 \right) \right\} + O(T^{-1})$$

であり、従って

$$(4.13) \quad E(t_{\hat{\mu}}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(2\alpha \frac{\beta}{\omega} + (1-\alpha^2) \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^3 \right) + O(T^{-1})$$

が得られる。 $t_{\hat{\mu}}$ は t_a の展開より複雑な形をしているが、 t_a の場合と同様、 LSE の分布ほどゆがんでいない。

(注)

- (1) グラム—シャリーエ展開は、本質的にエッジワース展開と変わらない。コーニッシュ—フィッシャー展開は、より高次のキウムラントの計算が必要である。これらの展開の基本的な考え方については、*Johnson and Kotz* (1970) 参照。
- (2) LSE の $1/T$ までの明示的な結果は *Phillips* (1980a) に与えられている。*Phillips* (1977) で得られた t 検定統計量の展開は正しくない。正しい形は、本論第Ⅳ節の (4.6) 式で与えられる。
- (3) この場合の $1/T$ までの展開結果については *Maekawa* (1981), *Tse* (1979) 参照。
- (4) *Tanaka* (1981) においては、 α 及び μ の LSE の展開は $1/T$ まで、又それぞれの t 検定統計量の展開は $1/\sqrt{T}$ まで明示的に求められている。
- (5) 密度関数は必ずしも存在するとは限らないが、 $\phi_T(\theta)$ を $F_T(x)$ の特性関数とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_T(\theta)|^r d\theta < \infty \text{ for some } r \geq 1$$

の時、存在が保証される。

- (6) 一般に n 個の統計量 $S_T^{(1)}, S_T^{(2)}, \dots, S_T^{(n)}$ の分布については、既知の $n \times 1$ ベクトル $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, 但し、 $\|h\| = 1$ を用いて、 S_T としては h_j をウェイトにした $S_T^{(j)}$ の線形結合を考えればよい。
- (7) ベクトル q の決め方が一意的でないため、定義を変えた場合には S_T についても、この条件を満足するように変更する必要がある。
- (8) この結果については本論では省略する。詳細については *Tanaka* (1981) 参照。
- (9) 前節では特性関数を考えていたが、以下では記号の簡略化のため、代りに積率母関数を使う。
- (10) 唯一の例外は、第Ⅱ節で定義された $\omega^2 = -\dot{\psi}_{jk} e_j e_k$ である。このオーダーは定数であるが、 $1/T$ の展開を得るためには、このオーダーまで計算しなければならない。
- (11) 分布のすそでの近似をよくするために、*large deviation expansion* という方法があるが、これについては *Ibragimov and Linnik* (1971) 参照。
- (12) *Phillips* (1977) で求めてある結果は正しくない。それは同論文の p.484 において e_{11} という偏微係数を誤って計算したことによる。

参考文献

- Hannan, E.J. (1970) *Multiple Time Series*. New York, John Wiley.
 Ibragimov, I.A. and Linnik, V.V. (1971) *Independent and Stationary Sequen-*

- ces of Random Variables. Groningen, Wolter-Noordhoff.
- Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970) Continuous Univariate Distributions-1. New York, John Wiley.
- Maekawa, K. (1981) "An Approximation to the Distribution of the Least Squares Estimator in AR(1) Model with the Exogenous Variables." Hiroshima University Technical Report No.38, April.
- Phillips, P.C.B. (1977) "Approximations to Some Finite Sample Distributions Associated with a First-Order Stochastic Difference Equation." *Econometrica*, 45, 463-485.
- _____ (1980a) "Edgeworth and Saddle Point Approximations in the First-Order Noncircular Autoregression." *Biometrika*, 65, 91-98.
- _____ (1980b) "Finite Sample Theory and the Distributions of Alternative Estimators of the Marginal Propensity to Consume." *Review of Economic Studies*, XLVII, 183-224.
- Sargan, J.D. (1976) "Econometric Estimators and the Edgeworth Approximation." *Econometrica*, 44, 421-448.
- Tanaka, K. (1981) "Asymptotic Expansions Associated with the AR(1) Model with Unknown Mean." Unpublished (submitted for publication).
- Tse, Y.K. (1979) "Finite Sample Approximations to the Distribution of the Autoregressive Coefficients in a First Order Stochastic Difference Equation with Exogenous Variables." London School of Economics.